Maratona de Matemática - 2018

- Todos os problemas possuem a mesma pontuação (10 pontos).
- Deve ser entregue apenas uma solução por equipe para cada problema.
- A prova possui 4 horas de duração.

1) Considere um tabuleiro com 3 linhas e 3 colunas. Em cada casa do tabuleiro é colocado um número inteiro positivo. O tabuleiro é chamado *quadrado mágico* quando as somas dos números em cada uma das três colunas, em cada uma das três linhas e nas duas diagonais são todas iguais. Um exemplo de quadrado mágico é

Q_1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Note que, de fato,

$$2+7+6=9+5+1=4+3+8=15$$
$$2+9+4=7+5+3=6+1+8=15$$
$$2+5+8=4+5+6=15$$

(a) Seja a inteiro maior do que 2. Complete o quadrado mágico a seguir na folha de respostas.

Q_2

$a+1$		$2a-3$
	a	
		$a-1$

(b) Considere agora o produto dos números de cada linha, coluna e diagonal. Em Q_1, a soma dos produtos das linhas é $2\cdot 7\cdot 6+9\cdot 5\cdot 1+4\cdot 3\cdot 8=225$, a soma dos produtos das colunas é $2\cdot 9\cdot 4+7\cdot 5\cdot 3+6\cdot 1\cdot 8=225$ e a soma dos produtos das diagonais é $2\cdot 5\cdot 8+4\cdot 5\cdot 6=200$. Mostre que, em Q_2, a soma dos produtos das linhas é igual à soma dos produtos das colunas.

(c) Encontre a de modo que, em Q_2, as somas dos produtos das linhas, das colunas e das diagonais sejam todas iguais.

2) Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;

- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso

- o time A não empatou nenhuma partida;
- o time B não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela seguinte, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe na folha de respostas, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do $\times$, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

3) Considere a sequência

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots,$$

obtida ao se escrever sucessivamente um 1, dois 2's, três 3's, quatro 4's, etc.

(a) Encontre os termos de ordem 2016, 2017 e 2018 desta sequência.

(b) Encontre uma fórmula geral simples para o n-ésimo termo da sequência (a fórmula pode envolver as funções piso $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ou teto $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$).

4) Um dos mais importantes resultados da teoria de matrizes é o Teorema de Cayley-Hamilton:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. Denominamos $p(x) = \det(xI_n - A)$ o polinômio característico de A, sendo I_n a identidade de ordem n. Então $p(A) = O_n$, em que O_n é a matriz nula de ordem n.

Para $n = 2$ pode-se verificar que o polinômio característico de A é $p(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$, em que $\operatorname{tr}(A)$ é o traço da matriz A, isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal, e $\det(A)$ é o determinante da matriz A.

(a) Prove o Teorema de Cayley-Hamilton para $n = 2$, ou seja, mostre que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2.$$

Atenção: A igualdade $p(A) = \det(A.I_2 - A)$ não tem sentido, pois $p(A)$ é uma matriz e $\det(A.I_2 - A)$ é um número. Isto é, a demonstração **não** é dessa maneira!

(b) Considere as equações da forma $aX^2 + bX + cI = 0$, em que a incógnita X é uma matriz quadrada de ordem 2, a, b e c são parâmetros reais e $a \neq 0$. Tais equações sempre possuem soluções com todas as entradas reais?

5) Flávio está tentando abrir um cofre cuja senha consiste de três letras em sequência, cada uma delas sendo A, B ou C, possivelmente com repetições. O cofre possui três botões correspondendo a cada uma das letras. Quando os últimos três botões apertados formam a sequência da senha, o cofre se abre. Assim, por exemplo, se a senha é AAB, e for pressionada a sequência

$$C \to A \to B \to A \to A \to B,$$

o cofre irá se abrir após apertarmos o botão B na sexta vez. Qual é o número mínimo de botões que Flávio precisa apertar para garantir que o cofre irá se abrir? Explique sua resposta.

6) Defina a sequência de números reais (x_n) por

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n} \text{ para } n \geq 0.$$

(a) Mostre que a sequência (x_n) é limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k, \forall n \geq 0$.

(b) Mostre que (x_n) converge, e encontre o valor do limite.

7) Dados inteiros n e k, definimos

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Encontre o valor de $\binom{2018}{0} - \binom{2017}{1} + \binom{2016}{2} - \cdots$.

8) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ satisfaz a condição $\left|f(x)\right| \leq 1$ para todo $|x| \leq 1$. Encontre o valor máximo que $\left|f'(x)\right|$ assume no intervalo $[-1, 1]$. Obs: $f'(x) = 2ax + b$.