Maratona de Matemática - 2018

- Todos os problemas possuem a mesma pontuação (10 pontos).
- Deve ser entregue apenas uma solução por equipe para cada problema.
- A prova possui 4 horas de duração.

1) Considere um tabuleiro com 3 linhas e 3 colunas. Em cada casa do tabuleiro é colocado um número inteiro positivo. O tabuleiro é chamado *quadrado mágico* quando as somas dos números em cada uma das três colunas, em cada uma das três linhas e nas duas diagonais são todas iguais. Um exemplo de quadrado mágico é

Q_1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Note que, de fato,

$$2+7+6=9+5+1=4+3+8=15$$
$$2+9+4=7+5+3=6+1+8=15$$
$$2+5+8=4+5+6=15$$

(a) Seja a inteiro maior do que 2. Complete o quadrado mágico a seguir na folha de respostas.

Q_2

$a+1$		$2a-3$
	a	
		$a-1$

(b) Considere agora o produto dos números de cada linha, coluna e diagonal. Em Q_1, a soma dos produtos das linhas é $2\cdot7\cdot6+9\cdot5\cdot1+4\cdot3\cdot8=225$, a soma dos produtos das colunas é $2\cdot9\cdot4+7\cdot5\cdot3+6\cdot1\cdot8=225$ e a soma dos produtos das diagonais é $2\cdot5\cdot8+4\cdot5\cdot6=200$. Mostre que, em Q_2, a soma dos produtos das linhas é igual à soma dos produtos das colunas.

(c) Encontre a de modo que, em Q_2, as somas dos produtos das linhas, das colunas e das diagonais sejam todas iguais.

Solução.

a) Analisando a diagonal principal, vemos que a soma constante de todas as linhas, colunas e diagonais é $3a$. Assim, por exemplo, o segundo elemento da primeira linha é $3a-(a+1+2a-3)=2$. Fazendo um raciocínio similar para as outras entradas, temos a seguinte tabela

$a+1$	2	$2a-3$
$2a-4$	a	4
3	$2a-2$	$a-1$

b) A soma dos produtos de cada linha é dada por

$$2(a+1)(2a-3)+4a(2a-4)+3(2a-2)(a-1)=$$
$$(4a^2-2a-6)+(8a^2-16a)+(6a^2-12a+6)=18a^2-30a.$$

A soma dos produtos de cada coluna é dada por

$$3(a+1)(2a-4)+2a(2a-2)+4(2a-3)(a-1)=$$
$$(6a^2-6a-12)+(4a^2-4a)+(8a^2-20a+12)=18a^2-30a,$$

daí segue o resultado.

c) Em Q_2, a soma dos produtos de cada diagonal é

$$a(a+1)(a-1)+3a(2a-3)=a^3+6a^2-10a.$$

Assim devemos ter

$$a^3+6a^2-10a=18a^2-30a \iff a(a^2-12a+20)=0.$$

Portanto $a=0$, $a=2$ ou $a=10$. Descartamos os dois primeiros valores de a, pois para eles nem todos os elementos em Q_2 são inteiros positivos. Assim $a=10$.

□

2) Os times A, B, C, D e E disputaram, entre si, um torneio de futebol com as seguintes regras:

- o vencedor de uma partida ganha 3 pontos e o perdedor não ganha nada;
- em caso de empate cada um dos times ganha 1 ponto;
- cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros.

O campeão do torneio foi o time A, seguido na classificação por B, C, D e E, nessa ordem. Além disso

- o time A não empatou nenhuma partida;
- o time B não perdeu nenhuma partida;
- todos os times terminaram o torneio com números diferentes de pontos.

(a) O time A ganhou, perdeu ou empatou sua partida contra o time B? Por quê?

(b) Com quantos pontos o time A terminou o torneio? Por quê?

(c) Explique porque o time B obteve um número par de pontos nesse torneio.

(d) Na tabela seguinte, cada coluna representa uma partida. Sabendo que ocorreram exatamente 5 empates nesse torneio, desenhe na folha de respostas, em cada coluna da tabela, um círculo em volta do nome do time ganhador ou em volta do $\times$, em caso de empate.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

Solução.

(a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria no máximo 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

(c) 1ª solução: Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 8 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

$\square$

3) Considere a sequência

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots,$$

obtida ao se escrever sucessivamente um 1, dois 2's, três 3's, quatro 4's, etc.

(a) Encontre os termos de ordem 2016, 2017 e 2018 desta sequência.

(b) Encontre uma fórmula geral simples para o n-ésimo termo da sequência (a fórmula pode envolver as funções piso $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ou teto $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$).

Solução.

(a) Os primeiros k blocos ocupam $1+2+\cdots+k = k(k+1)/2$ posições. Assim, $f(n) = k$ se e somente se n ocorre entre as últimas k dessas posições, i.e., se e somente se

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}. \tag{*}$$

Para os casos $n = 2016$, 2017 e 2018 um cálculo direto nos fornece o valor apropriado de k: $63 \cdot 64/2 = 63 \cdot 32 = 2016$, e $64 \cdot 65/2 = 65 \cdot 32 = 2080$, assim os termos de ordem 2016, 2017 e 2018 são respectivamente 63, 64 e 64.

(b) Para obtermos um fórmula geral, multiplicamos $(*)$ por 2 e completamos quadrados em ambos os lados:

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n + \frac{1}{4} \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)^2,$$
$$k - 1 < \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leq k.$$

Isto mostra que $f(n) = k = \left\lceil \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \right\rceil$.

□

4) Um dos mais importantes resultados da teoria de matrizes é o Teorema de Cayley-Hamilton:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais. Denominamos $p(x) = \det(xI_n - A)$ o polinômio característico de A, sendo I_n a identidade de ordem n. Então $p(A) = O_n$, em que O_n é a matriz nula de ordem n.

Para $n = 2$ pode-se verificar que o polinômio característico de A é $p(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$, em que $\operatorname{tr}(A)$ é o traço da matriz A, isto é, a soma dos elementos de sua diagonal principal, e $\det(A)$ é o determinante da matriz A.

(a) Prove o Teorema de Cayley-Hamilton para $n = 2$, ou seja, mostre que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2.$$

Atenção: A igualdade $p(A) = \det(A.I_2 - A)$ não tem sentido, pois $p(A)$ é uma matriz e $\det(A.I_2 - A)$ é um número. Isto é, a demonstração **não** é dessa maneira!

(b) Considere as equações da forma $aX^2 + bX + cI = 0$, em que a incógnita X é uma matriz quadrada de ordem 2, a, b e c são parâmetros reais e $a \neq 0$. Tais equações sempre possuem soluções com todas as entradas reais?

Solução.

(a) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então $\operatorname{tr}(A) = a + d$ e $\det(A) = ad - bc$, portanto

$$\begin{aligned} A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & b(a+d)-b(a+d) \\ c(a+d)-c(a+d) & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = O_2. \end{aligned}$$

(b) A resposta é sim. Como $a \neq 0$, podemos supor dividindo a equação por a se necessário que $a = 1$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton no caso $n = 2$, é suficiente exibirmos uma matriz X tal que $\operatorname{tr}(X) = -b$ e $\det(X) = c$, por exemplo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 1 & -b \end{pmatrix}.$$

□

5) Flávio está tentando abrir um cofre cuja senha consiste de três letras em sequência, cada uma delas sendo A, B ou C, possivelmente com repetições. O cofre possui três botões correspondendo a cada uma das letras. Quando os últimos três botões apertados formam a sequência da senha, o cofre se abre. Assim, por exemplo, se a senha é AAB, e for pressionada a sequência

$$C \to A \to B \to A \to A \to B,$$

o cofre irá se abrir após apertarmos o botão B na sexta vez. Qual é o número mínimo de botões que Flávio precisa apertar para garantir que o cofre irá se abrir? Explique sua resposta.

Solução. A resposta é 29. Isto pode ser alcançado apertando os botões na seguinte sequência

$$AAACCCBCCACBBCBACABCAABBBABAA.$$

Existem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ sequências diferentes de três letras formadas pelas letras A, B e C, cada uma delas aparecendo em algum momento na sequência acima. Para ver que 29 é de fato o número mínimo, observe que nenhuma tentativa de abrir o cofre é realizada após se pressionar os dois primeiros botões. Apertando o terceiro botão, temos a primeira tentativa de abrir o cofre, e daí em diante após cada botão apertado é testada no máximo mais uma senha (formada pelos três últimos botões pressionados). Portanto, o primeiro momento em que podemos garantir que todas as senhas foram testadas é após apertamos os botões 2+27=29 vezes, e 29 de fato é o número mínimo. □

6) Defina a sequência de números reais (x_n) por

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n} \text{ para } n \geq 0.$$

(a) Mostre que a sequência (x_n) é limitada, isto é, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k, \forall n \geq 0$.

(b) Mostre que (x_n) converge, e encontre o valor do limite.

Solução.

(a) Vamos provar, por indução, que $0 < x_n < 1/2$ para $n \geq 1$, e daí claramente segue o resultado. Para $n = 1$, temos $0 < x_1 = 1/3 < 1/2$. Suponha agora que para $n \geq 1$, $0 < x_n < 1/2$. Então $2/5 < x_{n+1} = 1/(2 + x_n) < 1/2$. Isto completa a demonstração.

(b) 1ª Solução: Seja $f(x) = 1/(2 + x)$. A equação $f(x) = x$ tem uma única solução no intervalo $0 < x < 1/2$ dada por $p = \sqrt{2} - 1$. Além disso, $\left|f'(x)\right| = 1/(2 + x)^2 < 1/4$ para $0 < x < 1/2$. Portanto, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - p| &= \left|f(x_n) - f(p)\right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x_n - p|, \end{aligned}$$

pelo teorema do valor médio.

Iterando, obtemos

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-p| &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_{n-1}-p| \\ &\leq \cdots \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |x_1 - p| .\end{aligned}$$

Daí a sequência tende ao limite $\sqrt{2}-1$.

2ª Solução: Seja $f(x) = 1/(2+x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Então f leva o intervalo fechado $[0,1]$ em $[1/3, 1/2] \subset [0,1]$. Adicionalmente $\left|f'(x)\right| = \left|\frac{1}{(2+x)^2}\right| \leq \frac{1}{4}$ para $x \in [0,1]$. Portanto $f : [0,1] \to [0,1]$ é uma contração com constante de Lipschitz $1/4 < 1$, assim f possui um único ponto fixo y, e a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$ definida acima converge para y. Temos $y = 1/(2+y)$ ou $y^2 + 2y = 1$, de onde $y = \sqrt{2}-1$, uma vez que $0 \leq y \leq 1$.

□

7) Dados inteiros n e k, definimos

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário .}\end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Encontre o valor de $\binom{2018}{0} - \binom{2017}{1} + \binom{2016}{2} - \cdots$.

Solução.

(a) 1ª Solução: Temos

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{k}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

2ª Solução: É bem conhecido que $\binom{n}{k}$ representa o número de maneiras dentre n objetos distintos escolhermos k deles. Seja A um desses objetos. Podemos separar as escolhas dos k objetos entre aquelas em que A é um dos objetos escolhidos e aquelas em que não. O número de escolhas em que A é um dos objetos é dada por $\binom{n-1}{k-1}$ (dentre os $n-1$ objetos diferentes de A escolhemos $k-1$). O número de escolhas em que A não é um dos objetos escolhidos é dado por $\binom{n-1}{k}$ (dentre os $n-1$ objetos diferentes de A, escolhemos k deles). Daí segue o resultado.

(b) Seja $S_n = \binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \cdots$. Utilizando (a), podemos reescrever S_n como

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{n-1}{0} - \binom{n-2}{1} - \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1} - \cdots \\ &= \left(\binom{n-1}{0} - \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} - \cdots\right) - \left(\binom{n-2}{0} - \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} - \cdots\right) \\ &= S_{n-1} - S_{n-2}. \end{aligned}$$

Temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1$, $S_1 = \binom{1}{0} = 1$, $S_2 = \binom{2}{0} - \binom{1}{1} = 0$, $S_3 = S_2 - S_1 = -1$, $S_4 = S_3 - S_2 = -1 - 0 = -1$, $S_5 = 0$, $S_6 = 1$, $S_7 = 1$. Assim temos que S_n é periódica de período 6, i.e., $S_n = S_{n+6}$. Como $2018 = 6 \cdot 336 + 2$, temos que $S_{2018} = S_2 = 0$.

□

8) Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ satisfaz a condição $\left|f(x)\right| \leq 1$ para todo $|x| \leq 1$. Encontre o valor máximo que $\left|f'(x)\right|$ assume no intervalo $[-1, 1]$. Obs: $f'(x) = 2ax + b$.

Solução. A resposta é 4. Como $[-1, 1]$ é um intervalo simétrico, temos que

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\left|ax^2 + bx + c\right| = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|ax^2 - bx + c\right| = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|-ax^2 - bx - c\right| = \max_{-1\leq x\leq 1}\left|-ax^2 + bx - c\right|$$

e

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|2ax + b| = \max_{-1\leq x\leq 1}|-2ax + b|.$$

Daí podemos supor sem perda que a e b são números não-negativos. Se $a = 0$ então

$$f'(x) = |b| = \frac{\left|f(1) - f(-1)\right|}{2} \leq \frac{\left|f(1)\right| + \left|f(-1)\right|}{2} \leq 1.$$

Suponhamos então que $a > 0$. Então $\max\limits_{|x|\leq 1}\left|f'(x)\right| = \max\limits_{|x|\leq 1}|2ax + b| = 2a + b$. Além do mais,

$$\max_{|x|\leq 1}\left|f(x)\right| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) \leq 1, \\ f(0) \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c \leq 1, \\ c \geq -1 \end{cases} \Rightarrow a + b \leq 2 \Rightarrow a \leq 2.$$

Portanto, $\max\limits_{|x|\leq 1}\left|f'(x)\right| = 2a + b = a + (a + b) \leq 2 + 2 = 4$. Note que o valor 4 é alcançado se $a = 2$, $b = 0$ e $c = -1$, isto é, se $f(x) = 2x^2 - 1$. □